POIRET Aurélien MPSI
TD n° 22 ★★

Dénombrement

1 Dénombrement pratique

Exercice N° 1 : Soit E l'ensemble des mots de longueur 7 dont les 7 lettres sont prises dans l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet latin.

1. Déterminer le cardinal de E. Réponse : 26^7
2. Déterminer le nombre de mots de E contenant exactement 4 fois la lettre K. Réponse : 546 875
3. Déterminer le nombre de mots de E contenant au moins 4 fois la lettre K. Réponse : 560 176
4. Déterminer le nombre de mots de E contenant exactement 2 voyelles, différentes. Réponse : 630×20^5
5. Déterminer le nombre de mots de E contenant exactement 2 voyelles. Réponse : 756×20^5
6. Déterminer le nombre de mots de E pour lesquels dès que deux lettres distinctes sont présentes alors elles se répètent au moins 3 fois. Réponse : 22 776

Exercice N° 2 : Quel est le nombre d'anagrammes des mots suivants ?
a) cahier b) stylos c) bonbon d) anagramme
Réponses : a) 720 b) 360 c) 90 d) 30 240

Exercice N° 3 : Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires. On tire successivement 6 boules de l'urne, en remettant à chaque fois la boule tirée.
A/ Première situation : les boules blanches sont numérotées de 1 à 5 ; les boules noires sont numérotées de 6 à 13.

1. Déterminer le nombre de tirages. Réponse : 13^6
2. Déterminer le nombre de tirages amenant 5 boules noires et une boule blanche. Réponse : 30×8^5
3. Déterminer le nombre de tirages amenant une boule noire au plus. Réponse : 53×5^5
4. Déterminer le nombre de tirages amenant 3 boules noires et 3 boules blanches. Réponse : 20×40^3
5. Déterminer le nombre de tirages amenant une boule blanche au moins. Réponse : $13^6 - 8^6$

B/ Deuxième situation : les boules blanches sont indiscernables ; les boules noires sont indiscernables. Mêmes questions. Réponses : 64 ; 6 ; 7 ; 20 ; 63

Exercice N° 4 : On dispose de 10 billes que l'on veut placer sur une même rangée.

1. On suppose que les 10 billes sont de couleurs différentes. De combien de façons peut-on les ranger ? Réponse : 10!
2. On suppose qu'il y a 5 billes rouges, 2 blanches et 3 vertes, et que l'on ne peut pas discerner les billes d'une même couleur.
   (a) De combien de façons peut-on les ranger ? Réponse : 2 520
   (b) De combien de façons peut-on les ranger si l'on veut que les billes soient groupées par couleur ? Réponse : 6
   (c) Même question si seules les rouges doivent être groupées. Réponse : 60

Exercice N° 5 : Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement et sans remise toutes les boules de l'urne et on note les numéros obtenus.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ? Réponse : $n!$

2. Quel est le nombre de tirages pour lesquels les numéros obtenus sont dans l'ordre croissant ? Réponse : 1
3. Soit $k \in [\![1; n]\!]$. Quel est le nombre de tirages pour lesquels les k premiers numéros obtenus sont dans l'ordre croissant ? Réponse : $\frac{n!}{k!}$

Exercice N° 6 : Un groupe de n personnes est invité à un repas.

1. On dispose d'une rangée de n chaises. Combien existe-t-il de dispositions différentes pour placer les invités ? Réponse : $n!$
2. On dispose maintenant d'une table ronde avec n chaises. Sachant que deux dispositions sont identiques si chaque invité à les mêmes voisins, combien existe-t-il de dispositions différentes pour placer les invités ? Réponse : $(n-1)!$

2 Dénombrement théorique

Exercice N° 7 : Soient A, B et C trois parties d'un ensemble finie E. Exprimer $|A \cup B \cup C|$ en fonctions des cardinaux de A, B, C, $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$ et $A \cap B \cap C$.

Exercice N° 8 : Combien existe-t-il de relation d'ordre total sur un ensemble E de cardinal n ?

Exercice N° 9 : On trace dans un plan n droites en position générale (c'est-à-dire deux d'entre elles ne sont jamais parallèles ni trois d'entre elles concourantes). Combien forme-t-on ainsi de triangles ?

Exercice N° 10 : Pour $n \in \mathbb{N}$, proposer une démonstration par dénombrement de l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice N° 11 : Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Soit X une partie à p éléments de E. Combien y a-t-il de parties Y de E disjointes de X ?
2. Combien y a-t-il de couples (X, Y) formés de parties disjointes de E ?

Exercice N° 12 : Soit E un ensemble à n éléments. Combien y a-t-il de parties X et Y de E telles que $Y \subset X$?

Exercice N° 13 : Soit A une partie d'un ensemble E à n éléments. On pose $p = |A|$.

1. Combien y a-t-il de parties X de E contenant A ?
2. Combien y a-t-il de parties X de E à $m \in \{p, \ldots, n\}$ éléments contenant A ?
3. Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \cap Y = A$?

Exercice N° 14 : Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1. Calculer $\sum\limits_{X \subset E} |X|$.
2. Calculer $\sum\limits_{X, Y \subset E} |X \cap Y|$.

Exercice N° 15 : Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in \mathbb{N}$, on note Σ_n^p le nombre de n-uplets $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = p$.

1. Déterminer $\Sigma_n^0, \Sigma_n^1, \Sigma_n^2, \Sigma_1^p$ et Σ_2^p.
2. Établir
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \Sigma_{n+1}^p = \Sigma_n^0 + \Sigma_n^1 + \cdots + \Sigma_n^p.$$

3. En déduire que
$$\Sigma_n^p = \binom{n+p-1}{p}.$$

Exercice N° 16 : Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Soit $f \in E^E$. $f \circ f = f$ si, et seulement si, pour tout $x \in f(E)$, $f(x) = x$.
2. Dénombrer l'ensemble des applications $f : E \to E$ telles que $f \circ f = f$.
   On exprimera le résultat à l'aide d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.

Exercice N° 17 : Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1. Combien y a-t-il de lois de compositions internes sur E ?
2. Combien y a-t-il de lois de compositions internes commutatives sur E ?
3. Combien y a-t-il de lois de compositions internes sur E possédant un élément neutre ?
4. Combien y a-t-il de lois de compositions internes commutatives sur E possédant un élément neutre ?
5. Combien y a-t-il de lois de compositions internes associatives sur E si $n = 2$?

Exercice N° 18 : Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1. Combien y a-t-il de relations binaires sur E ?
2. Combien y a-t-il de relations binaires réflexives sur E ?
3. Combien y a-t-il de relations binaires symétriques sur E ?
4. Combien y a-t-il de relation binaires antisymétriques sur E ?
5. Combien y a-t-il de relations binaires réflexives et symétriques sur E ?
6. Combien y a-t-il de relations binaires symétriques et antisymétriques sur E ?
7. Combien y a-t-il de relations binaires réflexives et antisymétriques sur E ?
8. Combien y a-t-il de relations binaires réflexives, symétriques et antisymétriques sur E ?
9. Combien y a-t-il de relation binaires transitives sur E si $n = 2$?

Exercice N° 19 : Un ensemble muni d'une loi interne associative ne possède pas nécessairement un élément neutre. Mais, lorsqu'il en possède un, par exemple e, alors $e^2 = e$.
Réciproquement, montrer qu'un ensemble fini, non vide, muni d'une loi interne associative, à défaut de possède un élément neutre, possède un élément e vérifiant $e^2 = e$

3 Dénombrement et application

Exercice N° 20 : Soient E un ensemble fini, F un ensemble quelconque et $f : E \to F$ une application. Montrer que
$$f \text{ est injective si, et seulement si, } |f(E)| = |E|.$$

Exercice N° 21 : Soient A et B deux parties de E et F. Étant donnée une application $f : E \to F$, est-il vrai que

1. Si A est une partie finie de E alors $f(A)$ est une partie finie de F.
2. Si $f(A)$ est une partie finie de F alors A est une partie finie de E.
3. Si B est une partie finie de F alors $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E.
4. Si $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E alors B est une partie finie de F ?

Exercice N° 22 : Soient $E = \{1, \ldots, n\}$ et $F = \{1, \ldots, p\}$ avec $n \leqslant p \in \mathbb{N}$.
Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de E vers F ?

Exercice N° 23 : Soit E un ensemble fini de cardinal n. Démontrer, à l'aide d'une bijection que, $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$.

Exercice N° 24 : On note $\mathbb{P}$ le sous ensemble de $\mathbb{N}$ formé des entier pairs. Montrer que $\mathbb{P}$ et $\mathbb{N}$ sont en bijection et en déduire que l'ensemble $\mathbb{N}$ est infini.

Exercice N° 25 : Nombre de dérangements
Soit E un ensemble fini et non vide à n éléments. On appelle dérangement de E toute permutation de E ne laissant aucun élément invariant. On notera D_n le nombre de dérangements de E.
Par convention, on pose $D_0 = 1$.
Le but de cet exercice est de montrer que $D_n = n! \times \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. par diverses méthodes.

1. Si E comporte un seul élément, y-a-t-il des dérangements de E ? En déduire D_1.
2. Si E comporte deux éléments, combien y-a-t-il de dérangements de E ? En déduire D_2.
3. Combien y-a-t-il de permutations qui laissent exactement k éléments de E invariants ? En déduire la formule suivante :
$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k. \tag{$\star$}$$
4. *Méthode N° 1 :*
Montrer le résultat en utilisant la formule d'inversion de Pascal montré dans le TD de calculs algébriques.

> **Lemme 1 : Formule d'inversion de Pascal**
> Si $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ et $(b_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ sont deux familles de réels vérifiant
> $$\forall p \in \{0, \cdots, n\},\ b_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a_k,$$
> alors
> $$\forall p \in \{0, \cdots, n\},\ a_p = (-1)^p \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k b_k.$$

5. *Méthode N° 2 :*
En observant que
$$\forall k \in \{0, \cdots, p-1\},\ \forall q \in \{k, \ldots, p\},\ \binom{p}{q}\binom{q}{k} = \binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k},$$
montrer le résultat par récurrence.
6. *Méthode N° 3 :*
Notons $E = \{x_1, \cdots, x_n\}$ en extension et posons, pour $1 \leqslant k \leqslant n$,
$$A_k = \{f \in S_E \ / \ f(x_i) = x_i\}.$$
En appliquant la formule du crible généralisée, retrouver la valeur de D_n.

7. *Application :*
   Cinq couples de danseurs se rendent à un bal masqué. À l'arrivée, on sépare les hommes et les femmes : on numérote les femmes de 1 à 5 et les hommes de 1 à 5. On les fait ensuite s'élancer sur une piste, chaque homme choisissant au hasard une femme pour partenaire.
   (a) A chaque numéro de femme, on associe le numéro de l'homme avec lequel elle danse. Combien y-a-t-il d'associations possibles ?
   (b) Donner la probabilité pour qu'aucun couple légitime ne soit reconstitué.
   (c) Déterminer la probabilité pour qu'un seul couple légitime soit reconstitué.
   (d) Déterminer la probabilité pour qu'il y ait plus de couples illégitimes sur la piste de danse que de couples légitimes.

Exercice N° 26 : Nombre de surjections
Soient E et F deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs n et p. On note S_n^p le nombre de surjections de E sur F. Par convention, on pose $S_n^0 = 0$.
Le but de cet exercice est de montrer que $S_n^p = \sum\limits_{k=0}^{p} (-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^n$ par diverses méthodes.

1. Donner les valeurs S_n^1, S_n^n, S_1^p et S_n^p pour $p > n$.
2. *Méthode N° 1 :*
   (a) On considère a un élément de E. On observant qu'une surjection de E sur F réalise, ou ne réalise pas, une surjection de $E\setminus\{a\}$ sur F, établir que
   $$S_n^p = p(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p).$$
   (b) En déduire S_n^p.
3. *Méthode N° 2 :*
   (a) Soit $1 \leqslant k \leqslant p$. Combien y-a-t-il d'application de E dans F dont l'image possède k éléments ?
   En déduire que
   $$p^n = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} S_n^k. \qquad (\star)$$
   (b) À l'aide de la formule d'inversion de Pascal, en déduire S_n^p.
4. *Méthode N° 3 :*
   Notons $F = \{x_1, \cdots, x_p\}$ en extension et posons, pour $1 \leqslant k \leqslant p$,
   $$A_k = \left\{f \in F^E \ / \ x_k \text{ n'a pas d'antécédant par } f\right\}.$$
   En appliquant la formule du crible généralisée, retrouver la valeur de S_n^p.

Exercice N° 27 : Nombre de Bell
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments.

1. Donner B_0, B_1, B_2 et B_3.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$
3. On note S_n^p le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments.
   Montrer que
   $$B_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{S_n^p}{p!}.$$

4. On admet que
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!} = \frac{1}{e}.$$
Etablir que
$$B_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}.$$
5. En déduire le nombre de relation d'équivalence d'un ensemble à n éléments.

Exercice N° 28 : Le lemme des bergers

Soit E et F deux ensembles finis et φ une application de E dans F surjective.

1. Vérifier que les $\left(\varphi^{-1}(\{y\})\right)_{y\in F}$ forment une partition de E
2. Montrer que $|E| = \sum_{y\in F} |\varphi^{-1}(\{y\})|$.
3. Montrer le lemme des bergers, c'est-à-dire que s'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que
$$\forall y \in F,\ \left|\varphi^{-1}(\{y\})\right| = p$$
alors $|E| = p|F|$.
Remarque : Ce résultat signifie que pour compter les moutons d'un troupeau, il suffit de compter les pattes puis de diviser par 4.
4. Soient $2 \leqslant p \leqslant n$ deux entiers. Notons $\mathcal{I}(p,n)$ l'ensemble des applications injectives de $[\![1;p]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$.
En considérant l'application
$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{I}(p,n) & \to & \mathcal{I}(p-1,n) \\ f & \mapsto & f_{|[\![1;p-1]\!]} \end{array}$$
retrouver la valeur de A_n^p.
5. Soient $1 \leqslant k \leqslant n$ deux entiers.
En considérant l'application
$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{I}(k,n) & \to & \{A \subset [\![1;n]\!] \ / \ |A| = k\} \\ f & \mapsto & \mathrm{Im}(f) \end{array}$$
retrouver la valeur de $\binom{n}{k}$.

Exercice N° 29 : Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe fini G. On note $HK = \{hk \ / \ h \in H$ et $k \in K\}$. Montrer que
$$|HK| \times |H \cap K| = |H| \times |K|.$$

Exercice N° 30 : Un mot M long de n lettres est constitué de r lettres différentes. La j-ème lettre apparaît p_j fois dans le mot M et donc
$$p_1 + \cdots + p_r = n.$$
Combien d'anagrammes du mot M peut-on constituer ?